

übereinstimmt, ist „beruhigend“. — Precursor-effekte beeinflussen das Geschehen höchstens im Sinne einer Reduktion der Relaxationszeiten.

Herrn Dr. R. WIENECKE und den Kollegen danken wir für nützliche Diskussionen; Frau L. ELSHOLZ und

andere Mitarbeiter haben zum Gelingen der Arbeit beigetragen. — Die vorstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Gesetzmäßigkeiten von Funkenentladungen im Nanosekundenbereich

R. GRÜNBERG

Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforsch. **20 a**, 202—212 [1965]; eingegangen am 5. Oktober 1964)

In the experimental section of this paper it is shown how the shape of the electrical spark discharge pulse (in air) depends on the discharged capacitor C , the initial field strength E_0 , and the inductance of the electrodes and of the spark L_0 . In order to get nanosecond pulses, the time constant $2\pi\sqrt{L_0C}$ must be some nanoseconds and the circuit has almost to be damped critically. The experiments confirm that this can be achieved for each capacitor C by choosing a suitable spark length l (or field strength E_0). In the theoretical section the current is calculated for a discharge circuit with a time-dependent spark resistance $R(t) = \varrho/t$. Under certain assumptions a solution for a “hard” discharge can be calculated according to the theory of WEIZEL and ROMPE. Thus formulae for i_{\max} , $(di/dt)_{\max}$, the spark resistance constant ϱ_0 and the risetime τ_{an} are obtained, and these prove to be in fair agreement with experimental results. The half-width of the light pulse exceeds that of the envelope of the electrical pulse approximately 1...2 nanoseconds. Thus the design of nanosecond light sources can be based on this theory.

Die vorliegende Arbeit setzt sich zum Ziel, Gesetzmäßigkeiten über den Ablauf schneller Funkenentladungen aufzufinden. Das ist eine Voraussetzung, um Schaltfunkenstrecken zu berechnen und kürzeste Lichtimpulse zu erzeugen, die für die Kurzzeitphotographie, Multipliertestzwecke und Gasentladungsuntersuchungen interessant sind. Man möchte wissen, wie die Form des elektrischen Impulses von der Entladekapazität, der Zuleitungsinduktivität und der Anfangsfeldstärke abhängt. Die kürzlich von ANDREEV und VANYUKOV¹⁻³ veröffentlichten Arbeiten verfolgten das gleiche Ziel. Die vorliegenden Untersuchungen ergänzen die Experimente der vorgenannten Autoren in den Nanosekundenbereich hinein, da wegen der hier verwendeten kleineren Kapazitäten und der induktionsarmen Bauweise die Zeitkonstante \sqrt{LC} etwa um den Faktor 10 kleiner ist und sich dadurch die Form der Entladung ändert. Zusammen mit den hier entwickelten theoretischen Überlegungen erhält man auf diese Weise einen Überblick über den Funkenablauf im Nanosekundenbereich.

¹ S. J. ANDREEV u. M. P. VANYUKOV, Zh. Tekhn. Fiz. **31**, 961 [1961]. — Engl. Übers. in Soviet Phys. — Techn. Phys. **6**, 700 [1962].

I. Experimenteller Teil

§ 1. Einführung in die Untersuchungsmethode

Der Funke entsteht durch Entladung eines Kondensators in die Gasstrecke, die die Elektroden verbindet. Die Aufladung erfolgt über einen hohen Vorwiderstand, die Entladung spontan nach Erreichen der Zündspannung. Der nach erfolgter Zündung schwingende Kreis kann durch ein Ersatzschaltbild dargestellt werden. Die benutzten Bezeichnungen gibt Abb. 1 an.

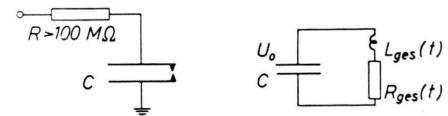


Abb. 1. Entladekondensator mit Ersatzschaltbild.

Der Gesamtwiderstand $R_{\text{ges}}(t)$ besteht im wesentlichen nur aus dem Funkenwiderstand R . Die Gesamtinduktivität $L_{\text{ges}}(t)$ setzt sich aus der konstanten Induktivität von Zuleitungen und Elektroden

² S. J. ANDREEV u. M. P. VANYUKOV, Zh. Tekhn. Fiz. **32**, 738 [1962]. — Engl. Übers. in Soviet Phys. — Techn. Phys. **7**, 538 [1962].

³ S. J. ANDREEV, Zh. Tekhn. Fiz. **32**, 967 [1962]. — Engl. Übers. in Soviet Phys. — Techn. Phys. **7**, 703 [1962].



und der veränderlichen Funkeninduktivität zusammen. Für den Schwingkreis gelten eine Anzahl einfacher Wechselstrombeziehungen. Ausgehend von der Leistungsaufnahme des Funkens

$$-W_R(t) = \frac{d(Li^2/2)}{dt} + \frac{d(CU_c^2/2)}{dt} \quad (1)$$

und der Spannung an der Kapazität

$$U_c(t) = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt \quad (2)$$

findet man bei etwa konstanter Induktivität L_0

$$W_R(t) = \frac{i}{C} \left(U_0 C - \int_0^t i \, dt - L_0 C \frac{di}{dt} \right), \quad L_{\text{ges}} \approx L_0, \quad (3)$$

$$R(t) = \frac{U_R(t)}{i(t)} = \frac{W_R(t)}{i^2(t)}, \quad (4)$$

$$U_R(t) = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt - L_0 \frac{di}{dt} \quad (5)$$

(Spannung am Funken).

Bei der graphischen Auswertung hat man die drei Randbedingungen

$$\int_0^\infty i \, dt = U_0 C, \quad (6)$$

$$U_c = U_L \quad \text{bei Stromnulldurchgang,} \quad (7)$$

$$\int_0^\infty W_R(t) \, dt = \frac{1}{2} C U_0^2 \quad (8)$$

zu erfüllen. Man kann die Auswertung vornehmen, wenn die vier Größen U_0 , C , L_0 und $i(t)$ gemessen worden sind. U_0 und C lassen sich bequem vor der Entladung und $L_{\text{ges}}(t) \approx L_0$ aus schwingenden Entladungen bestimmen. Auf die Strommessung soll im § 3 besonders eingegangen werden.

§ 2. Aufbau der Kondensatoren

Insgesamt werden vier Kondensatoren untersucht, die folgende Kapazität haben:

$$30 \text{ pF}, \quad 60 \text{ pF}, \quad 150 \text{ pF}, \quad 350 \text{ pF}.$$

In allen Fällen wird die Zuleitungsinduktivität möglichst klein gehalten, was – wie sich noch genauer herausstellen wird – auf den Schwingungsgrad der Entladung einen Einfluß haben wird. Die Kondensatoren bestehen aus Nickelblechen mit Teflonfolie als Dielektrikum. Die Wolframelektroden sind gemäß Abb. 2 an der Innenkante eines Loches in den Platten angeschweißt worden.

Die Elektroden haben Kugelgestalt mit einer kleinen Erhöhung in der Mitte als Ansatzpunkt für den

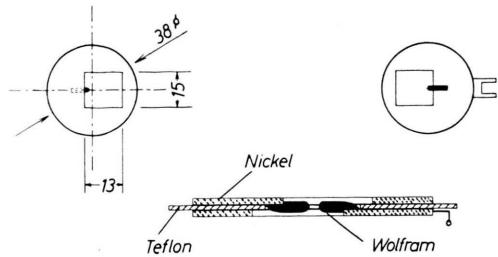


Abb. 2. Aufbau der Kondensatoren. Oben die beiden Nickelplatten; unten der zusammengesetzte Kondensator im Querschnitt (nicht maßstabsgetreu); schwarz ausgezogen: Die Elektroden.

Funken. Der Elektrodendurchmesser beträgt 1 mm, ihre Länge je 2,5 mm. Das Aufschweißen bewirkt eine geringe Zuleitungsinduktivität. Bei den beschriebenen Elektroden ist das Feld bei Abständen unter 1 mm etwa homogen und wird mit steigender Schlagweite (bis 2,4 mm) inhomogener. Die Anfangsfeldstärke nimmt deshalb mit steigender Funkenlänge ab. Messungen mit Elektroden von 3 mm und 5 mm Durchmesser ergaben keine wesentlich anderen Ergebnisse. Wie die Abb. 2 zeigt, ist die Richtung von Elektroden und Funken parallel zu den Platten. Bei 30 pF und 60 pF benutzt man dieselben Nickelbleche; die verschiedene Kapazität erhält man durch verschiedene starke Teflonfolie (0,2 bzw. 0,4 mm). Für 150 pF beträgt der Durchmesser der Nickelplatten 55 mm, für 350 pF 70 mm. Bis zu 10^{10} Hz hin ist der Verlustwinkel von Teflon klein. Die Dielektrizitätskonstante ϵ von Teflon beträgt etwa 2 im Frequenzbereich bis zu 10^{10} Hz hin.

Durch Verschieben der Nickelplatten – bei nahezu gleicher Kapazität – ändert man die Schlagweite. Durch Änderung der Folienstärke oder des Platten-durchmessers – bei gleicher Anfangsfeldstärke und Induktivität – ändert man die Kapazität. Anfangsfeldstärke und Kapazität lassen sich also unabhängig voneinander variieren.

§ 3. Strommessung im Nanosekundenbereich

Es ist grundsätzlich schwierig, mit einer Zeitauflösung von 0,3 ns Ströme zu messen, die nur einige Nanosekunden lang fließen. Man nutzt hier die mit der hohen Stromänderung einhergehende starke Feldstärkeänderung am Entladekondensator C aus. Man koppelt sie auf den Eingang eines Oszilloskopfes von 0,3 ns Anstiegszeit und einer Empfindlichkeit von 10 V/cm (Tektronix, Typ 519). Der Wellenwiderstand eines 125 Ω -Koaxialkabels und die Koppelkapazität des verlängerten Innenleiters gegen die obere Kondensatorplatte stellen ein Differenzierglied für die Kondensatorspannung $U_c(t)$ dar. Die Zeitkonstante $ZC_2 = 6,5 \cdot 10^{-12}$ sec ist hinreichend klein, um Frequenzen bis zu 1000 MHz zu differenzieren. C_3 ist klein genug.

$$U_{\text{osz}} = Z C_2 \frac{dU_c(t)}{dt} = Z C_2 \frac{1}{C} i(t), \quad (9)$$

$$i(t) = \frac{C}{C_2 Z} U_{\text{osz}}(t). \quad (10)$$

Durch Bestimmung der sehr kleinen Koppelkapazität C_2 ist eine Eichung möglich. Abb. 3 gibt das Ersatzschaltbild für die Strommessung an.

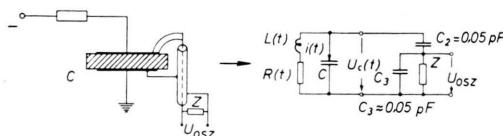


Abb. 3. Ersatzschaltbild für die Strommessung. C_2 ist die Koppelkapazität des Innenleiters gegen die obere, C_3 gegen Erde und die erdseitige Platte.

§ 4. Ergebnisse der Experimente

Die folgende Tab. 1 zeigt die eingestellten Entladeparameter⁴. Insbesondere entnimmt man ihr die Anfangsfeldstärke, die ja mit steigender Schlagweite abnimmt.

Eine Kontrolle der Strommessung ist auf zwei Wegen möglich:

1. Durch die Randbedingung $\int_0^\infty i \, dt = U_0 C$.
 2. Durch die Abschätzung der Induktivität.
- a) Die aus der Schwingung durch

$$L_0 = (1/4 \pi^2) (T^2/C)$$

C [pF]	Nr.	l [mm]	U_0 [kV]	E_0 [V/cm]	Entladeform
30	1 a, 1 b	0,2	1,7	$85 \cdot 10^3$	Schwingfall
	2	0,4	2,9	$72,5 \cdot 10^3$	Schwingfall
	3	0,7	3,9	$55,7 \cdot 10^3$	aperiod. Grenzfall
	4	1,5	6,0	$40 \cdot 10^3$	Kriechfall
	5	2,4	7,4	$30,8 \cdot 10^3$	Kriechfall
	6	3,4	7,8	$23 \cdot 10^3$	Kriechfall
60	7 a, 7 b	0,2	1,7	$85 \cdot 10^3$	Schwingfall
	8	0,4	2,9	$72,5 \cdot 10^3$	Schwingfall
	9	0,7	3,9	$55,7 \cdot 10^3$	Schwingfall
	10	1,2	5,4	$45 \cdot 10^3$	aperiod. Grenzfall
	11	1,5	6,0	$40 \cdot 10^3$	Kriechfall
	12	2,4	7,4	$30,8 \cdot 10^3$	Kriechfall
	13	3,4	7,8	$23 \cdot 10^3$	Kriechfall
150	14	0,2	1,7	$85 \cdot 10^3$	Schwingfall
	15	0,4	2,9	$72,5 \cdot 10^3$	Schwingfall
	16	0,7	3,9	$55,7 \cdot 10^3$	Schwingfall
	17	1,5	5,8	$38,6 \cdot 10^3$	aperiod. Grenzfall
	18	2,4	7,4	$30,8 \cdot 10^3$	Kriechfall
350	19	0,2	1,7	$85 \cdot 10^3$	Schwingfall
	20	0,4	2,9	$72,5 \cdot 10^3$	Schwingfall
	21	0,7	3,9	$55,7 \cdot 10^3$	Schwingfall
	22	1,5	5,8	$38,6 \cdot 10^3$	Schwingfall
	23	2,4	7,4	$30,8 \cdot 10^3$	aperiod. Grenzfall
	24	3,4	7,8	$23 \cdot 10^3$	Kriechfall

Tab. 1. Eingestellte Entladeparameter.

⁴ Der besseren Übersicht wegen ist für die Größe der Kapazität jeweils nur der Mittelwert angeschrieben worden; der

bestimmte Selbstinduktion L_0 muß vergleichbar sein mit der auf anderem Wege abgeschätzten Selbstinduktion L_0 .

b) Da sich die Teflonkondensatoren nur in der Stärke des Teflons und im Plattendurchmesser voneinander unterscheiden, müssen die Induktivitäten bei gleicher Funkenlänge gleich sein, d. h. die Schwingungsweiten im Verhältnis aus der Wurzel der Kapazitäten stehen.

Beide Bedingungen werden von den Stromoszillogrammen erfüllt. Die Gestalt der Oszillogramme streut im allgemeinen über Hunderte von Entladungen hinweg wenig. Jedoch treten bei der kleinsten Schlagweite von 0,2 mm gelegentlich größere Schwankungen auf (Höhe der Amplitude und Anzahl der Schwingungen). Bei größerer Schlagweite treten diese Schwankungen nicht mehr auf.

Auffallende Merkmale der Stromoszillogramme: Die folgenden Merkmale stellen ein wesentliches experimentelles Ergebnis dar und geben einen Einblick in die Gesetzmäßigkeiten des Funkenablaufs im Nanosekundenbereich (vgl. dazu Abb. 4).

tatsächliche Wert weicht von Schlagweite zu Schlagweite etwas davon ab.

1. Bei einer festen Kondensatorgröße nimmt das Schwingen mit steigender Schlagweite ab (stärkere Dämpfung mit fallender Anfangsfeldstärke).

2. Bei fester Schlagweite nimmt das Schwingen der Entladung mit steigender Kapazität zu. Anfangsfeldstärke und Zuleitungsinduktivität bleiben konstant.

3. Ein bemerkenswertes Ergebnis ist, daß für jede Kapazität eine kritische Schlagweite l_{kr} entsprechend einer kritischen Anfangsfeldstärke E_{0kr} existiert, für die die Entladung gerade aperiodisch verläuft. Zu einem größeren l gehört eine kriechende, zu einem kleineren l eine schwingende Entladung.

4. Aperiodische Entladungen – in Abb. 4 durch ein schwarzes Dreieck gekennzeichnet – erfordern bei größerer Kapazität eine größere Schlagweite. Man kann zu jeder vorgegebenen Spannung oder Ladeenergie eine Kapazität mit kritischer Schlagweite finden.

5. Für überaperiodische Entladungen findet man: Der maximale Strom nimmt mit steigender Schlagweite ab, obgleich die Anfangsspannung zunimmt. Der Impuls wird dafür sehr viel länger.

6. Bei allen schwingenden Entladungen wird die Schwingungszeit der hinteren, nahezu ungedämpften Schwingungen durch $T = 2\pi\sqrt{L_0 C}$ gegeben. Die erste Halbwelle, in deren Verlauf die Spannung zusammenbricht, ist breiter. Bei zunehmender Dämpfung wird diese erste Halbwelle immer breiter und

ist schließlich allein vorhanden (aperiodischer Fall).

7. Bei nichtschwingenden Entladungen findet man bei gleicher Schlagweite etwa gleiche Anstiegszeit des Stromes für alle C (festes E_0).

Die Auswertung der Stromoszilloskopbilder erfolgt nach den Gl. (3), (4), (5). In Abb. 5 sind für vier nichtschwingende Entladungen Strom, Spannung und Widerstand aufgetragen worden.

Einige bei der Auswertung auftretende Besonderheiten sollen diskutiert werden:

Die maximale Stromänderung $(di/dt)|_{\max}$ liegt im ersten Stromanstieg, und die maximale Spannung an der Induktivität $L_0 (di/dt)|_{\max}$ nimmt bei allen schwingenden Entladungen einen erheblichen Bruchteil von U_0 ein. Mit zunehmender Funkenlänge wird dieser Bruchteil immer kleiner und ist schließlich gegen U_0 zu vernachlässigen. Offensichtlich hat $(di/dt)|_{\max}$ eine von der Anfangsfeldstärke abhängige obere Grenze, die nicht – wie man früher annahm – durch $(di/dt)|_{\max} = U_0/L_0$ gegeben ist. Der Quotient

$$\psi = U_0/(L_0 (di/dt)|_{\max})$$

nimmt mit steigender Schlagweite und abnehmender Kapazität zu. Er erweist sich als geeigneter Parameter für den Schwingungsgrad der Entladung. Er soll wie in ¹ und ² mit Härte bezeichnet werden.

Leistungsverlauf: Die Hauptmenge der Energie (zwischen 70% und 100%) ist in allen Fällen mit

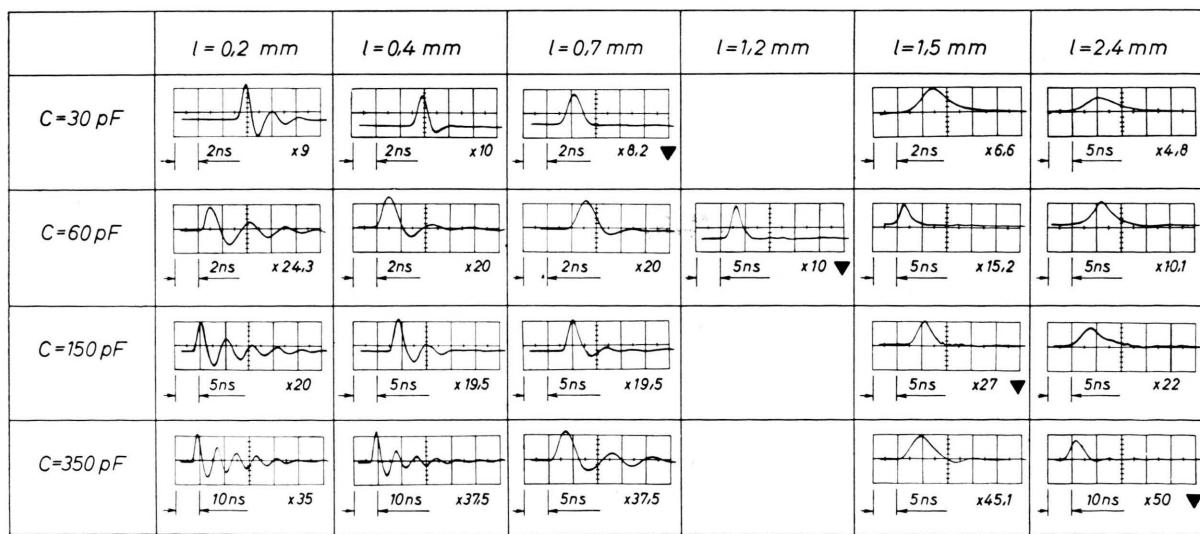


Abb. 4. Übersicht über die Stromoszilloskopbilder. Oben waagerecht: Die Funkenlänge l . Links senkrecht: Die Kapazität C . Man erhält den Strom in Ampère, wenn man ihn in Einheiten von 0,1 Skalenteilen abliest und mit dem am unteren Rand angegebenen Faktor multipliziert. Die Oszilloskopbilder sind nachgezeichnet worden.

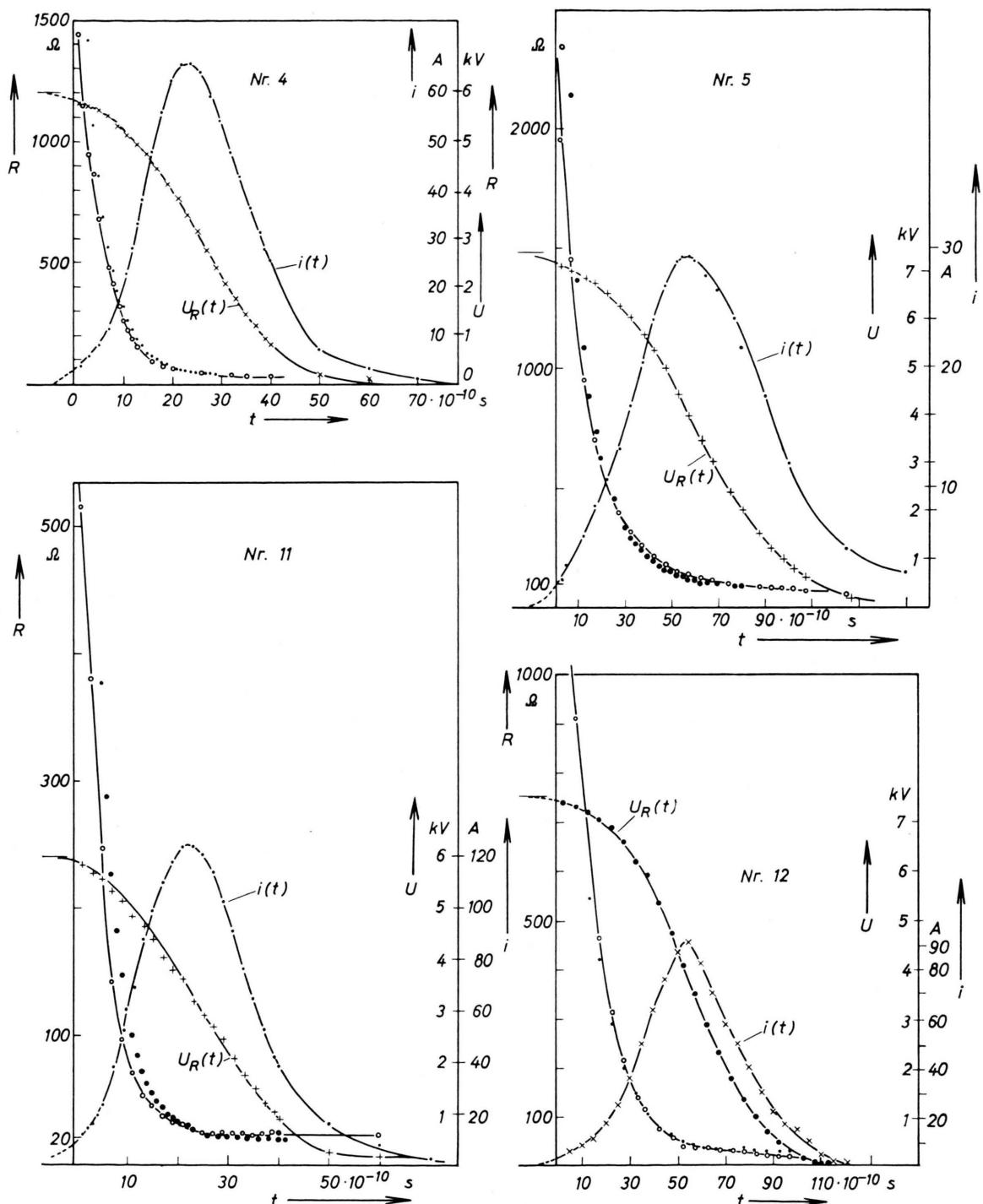


Abb. 5. Strom, Spannung und Widerstand für vier nichtschwingende Entladungen. Nr. 4: $C=30$ pF, $l=1,5$ mm; Nr. 5: $C=30$ pF, $l=2,4$ mm; Nr. 11: $C=60$ pF, $l=1,5$ mm; Nr. 12: $C=58$ pF, $l=2,4$ mm. Außer dem gemessenen Widerstand $\circ-\circ-\circ$ ist zum Vergleich der Widerstand nach dem Ansatz von ROMPE und WEIZEL eingetragen worden ($\cdots\cdots\cdots$).

Beendigung der ersten Stromhalbwelle an den Funken abgegeben worden. Bei schwingenden Entladungen folgt noch ein „Energieumsetzungsschwanz“ geringer Leistung, der zum Teil den bei Lichtimpulsen störenden Leuchtschwanz verursacht. Die Maxima von Strom und Leistung fallen etwa zusammen. Die Abb. 6 zeigt, wie sich der aperiodische Grenzfall durch kleinste Länge und größte Spitztleistung auszeichnet.

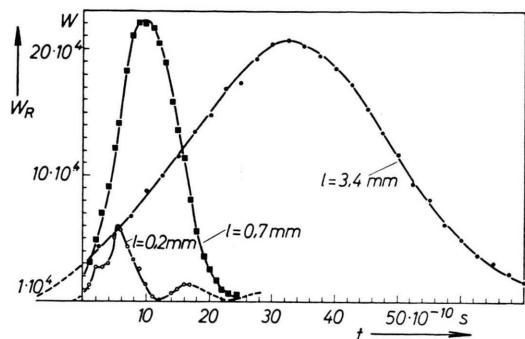


Abb. 6. Zeitlicher Leistungsverlauf beim 30 pF-Kondensator.

Widerstandsverlauf: Wie man aus den Abb. 7 und 8 entnimmt, fällt der Widerstand zunächst sehr steil auf einen kleinen Wert und ändert sich dann nur langsam. Im schwach veränderlichen Teil liegt $R(t)$ für schwingende Entladungen unter $R_{kr} =$

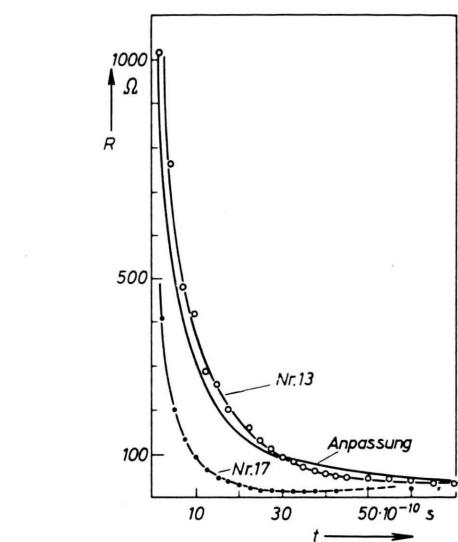


Abb. 8. Widerstandsverlauf für die 60 pF- und 150 pF-Kondensatoren. Nr. 13: 60 pF, $l=3,4$ mm; Nr. 17: 150 pF, $l=1,5$ mm.

$2\sqrt{L_0/C}$ und für kriechende Entladungen über R_{kr} . Im steilen Teil ändert sich R etwa exponentiell, also erheblich stärker als mit $1/t$. In Abb. 9 und 10 ist der Widerstandsverlauf halblogarithmisch aufgetragen worden. Tatsächlich ergibt sich für den Zeitraum des Spannungszusammenbruchs von U_0 auf $0,8 U_0$, in dem man die Feldstärke mit $0,9 E_0$ als etwa konstant annehmen darf, eine konstante Steigung.

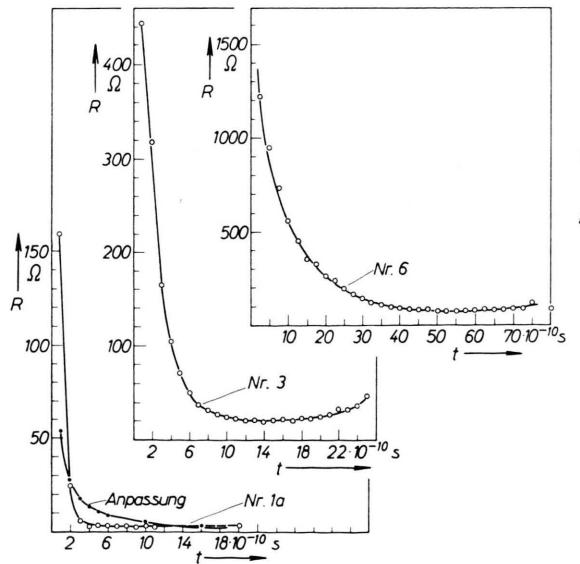


Abb. 7. Widerstandsverlauf für den 30 pF-Kondensator. Nr. 1a: $l=0,2$ mm; Nr. 3: $l=0,7$ mm; Nr. 6: $l=3,4$ mm.

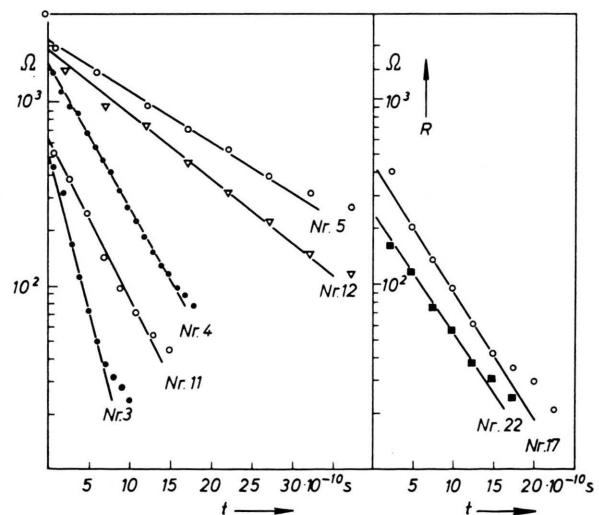


Abb. 9 und 10. Halblogarithmische Darstellung des Widerstandes während eines Zeitraumes, in dem die Anfangsfeldstärke etwa konstant ist.

Der Übergangsbereich zwischen dem steilen und dem schwach veränderlichen Teil lässt sich durch ein $(\varrho_0 l/t)$ -Gesetz anpassen, wie man aus Abb. 7 und 8 ersieht. Dabei ist ϱ_0 eine auf die Schlagweiteeinheit bezogene Konstante. Vergleicht man in der Abb. 7 $R(t)$ zu gleichen Zeiten für verschiedene Schlagweiten, findet man einen deutlichen Anstieg für ϱ_0 bei steigendem l . Das bewirkt die größere Dämpfung bei steigender Schlagweite.

Tab. 2 gibt eine Zusammenstellung von Meßergebnissen. Die Einhüllende des Stromimpulses ist die Hüllkurve, die etwa durch die Maxima verläuft; bei nichtschwingenden Entladungen ist sie mit dem Stromimpuls selbst identisch.

II. Vergleich von Theorie und Experiment

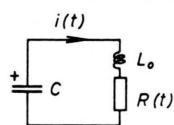
§ 1. Berechnung des Stromverlaufs

Die Berechnung des Stromverlaufs für einen Schwingkreis mit konstantem R , L_0 und C ist aus der Wechselstromlehre her bekannt. Hier soll die Berechnung für ein nach dem Gesetz

$$R(t) = (\varrho_0 l/t)$$

zeitabhängiges $R(t)$ mitgeteilt werden, wie es die Experimente nahelegen. Die Ausgangsgleichung bekommt dadurch die Gestalt

$$Q/C + R(t) \dot{Q} + L_0 \ddot{Q} = 0,$$



Der Gang der Lösung wird im Anhang dargestellt, hier wird das Ergebnis angegeben.

$$i(t) = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \frac{p! 2^p}{\beta^p} \frac{E_0}{\varrho_0} \frac{I_p(\beta t)}{t^{p-1}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}. \quad (11)$$

Die BESSEL-Funktion $I_p(\beta t)$ drückt die Schwingung aus. Für den Index p gilt

$$2p = \varrho_0/L_1 + 1 = \psi, \quad L_1 = L_0/l.$$

Er sorgt für die Verlängerung der ersten Halbwelle gegenüber den folgenden und in der Funktion $t^{-(p-1)}$ für eine rasche Dämpfung. E_0/ϱ_0 bestimmt die Amplitude, die also mit steigender Schlagweite fällt, da E_0 fällt und ϱ_0 steigt.

Eigenschaften der Lösung:

a) *Die maximale Steigung:* Sie liegt – etwas abweichend vom Oszillosgramm – im Nullpunkt. Denn für kleine Zeiten wächst $i(t)$ etwa linear mit t (für $\beta t \ll 1$).

$$i(t) \approx \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \frac{E_0}{\varrho_0} \cdot t = \frac{di}{dt} \Big|_{\max} \cdot t; \\ \frac{di}{dt} \Big|_{\max} = \frac{E_0}{\varrho_0} \left(1 - \frac{1}{\psi}\right).$$

b) *Der Schwingungsgradparameter Härte:*

$$\psi = \frac{U_0}{L_0 (di/dt)|_{\max}} = \frac{\varrho_0}{L_1} + 1.$$

Für große ψ ist $\psi \approx (\varrho_0/L_1)$. ψ hat keine obere Grenze, da ϱ_0 mit der Funkenlänge wächst und L_1 nicht stark veränderlich ist.

C [pF]	Nr.	l [mm]	U_0 [kV]	E_0 [V/cm]	T_1 [ns]	$T/2$ [ns]	$T_{1/2}$ [ns]	τ_{an} [ns]	$(di/dt)_{\max}$ [A/sec]	ψ	i_{\max} [A]	ϱ_0 [Ω sec/cm]
30	1 a	0,2	1,7	$8,5 \cdot 10^4$	1,2	1,0	1,4	0,5	$3,1 \cdot 10^{11}$	1,5	123	$2,7 \cdot 10^{-7}$
30	3	0,7	3,9	$5,57 \cdot 10^4$	2,6	—	1,4	0,9	$1,15 \cdot 10^{11}$	6,15	100	$4,3 \cdot 10^{-7}$
30	4	1,5	6,0	$4,0 \cdot 10^4$	5,0	—	2,4	1,8	$0,43 \cdot 10^{11}$	20,0	67	$7,5 \cdot 10^{-7}$
30	5	2,4	7,4	$3,08 \cdot 10^4$	15,0	—	7,5	4,0	$0,11 \cdot 10^{11}$	75,0	29,5	$28 \cdot 10^{-7}$
60	7 a	0,2	1,7	$8,5 \cdot 10^4$	1,6	1,5	3,0	0,75	$3,5 \cdot 10^{11}$	1,3	230	$0,8 \cdot 10^{-7}$
60	7 b	0,2	1,7	$8,5 \cdot 10^4$	2,0	1,6	2,0	0,8	$2,2 \cdot 10^{11}$	1,9	130	$3,25 \cdot 10^{-7}$
60	10	1,2	5,4	$4,5 \cdot 10^4$	5,0	—	2,25	1,6	$1,0 \cdot 10^{11}$	8,3	140	$3,5 \cdot 10^{-7}$
60	11	1,5	6,0	$4,0 \cdot 10^4$	5,5	—	2,25	1,8	$0,8 \cdot 10^{11}$	11,0	125	$4,0 \cdot 10^{-7}$
60	12	2,4	7,4	$3,08 \cdot 10^4$	10,0	—	4,5	3,2	$0,26 \cdot 10^{11}$	31,5	92,5	$8,3 \cdot 10^{-7}$
150	17	1,5	5,8	$3,86 \cdot 10^4$	7,0	—	3,5	2,25	$1,3 \cdot 10^{11}$	6,4	256	$1,93 \cdot 10^{-7}$
350	19	0,2	1,7	$8,5 \cdot 10^4$	4,25	3,9	16,0	1,8	$2,6 \cdot 10^{11}$	1,45	356	—
350	22	1,5	5,8	$3,86 \cdot 10^4$	9,75	3,75	6,0	3,5	$1,6 \cdot 10^{11}$	5,0	435	$1,2 \cdot 10^{-7}$
350	23	2,4	7,4	$3,08 \cdot 10^4$	11,0	—	6,0	3,75	$1,35 \cdot 10^{11}$	6,1	400	—

Tab. 2. Zusammenstellung von Meßergebnissen. l = Schlagweite, T_1 = Zeitpunkt beim Ende der ersten Halbwelle, τ_{an} = Anstiegszeit, $T/2$ = Dauer der Halbperiode einer Schwingung, $T_{1/2}$ = Halbwertsbreite der Einhüllenden des Stromimpulses. Die Zuleitungsinduktivität beträgt etwa 3 nH.

c) Die erste Nullstelle βt_1 von $i(\beta t)$ ist für $p > 2 \dots 3$ durch

$$\beta t_1 = p + 1,86 \sqrt[3]{p} + (1,03 / \sqrt[3]{p}) \pm \dots$$

gegeben. Da $p = \frac{1}{2}(1 + \varrho_0 l/L)$ ist, wandert die erste Nullstelle zu größeren t , wenn ϱ_0 und l wachsen. Das Verhältnis der Länge der ersten Halbwelle zur Länge der folgenden nahezu ungedämpften Halbwellen wächst gemäß

$$\frac{2 t_1}{T_1} = \frac{\beta t_1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(p + 1,86 \sqrt[3]{p} + \frac{1,03}{\sqrt[3]{p}} \right)$$

etwa linear mit p .

Die Lösung (11) enthält also – mit Ausnahme des Überganges zum Kriechfall – alle charakteristischen Eigenschaften der Entladung und gibt den Einfluß der Änderung der Parameter an.

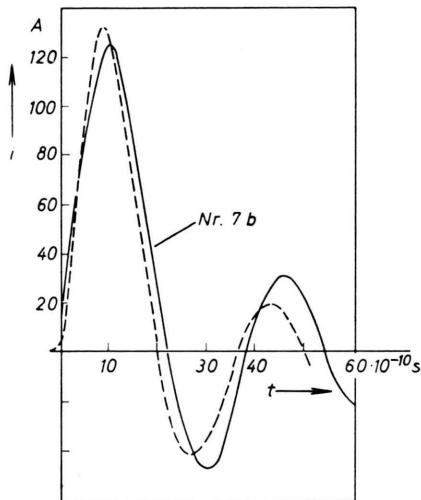


Abb. 11. Beispiel für einen gemessenen (gestrichelte Kurve) und einen berechneten (durchgezogene Kurve) Stromverlauf. $C=60 \text{ pF}$, $l=0,2 \text{ mm}$, $p=1,5$, $L=4,1 \text{ nH}$.

§ 2. Der Ansatz von WEIZEL und ROMPE^{5, 6}

Im Gegensatz zur vorhergehenden Rechnung wird hier ein physikalisches Bild zugrunde gelegt. Man geht davon aus, daß zum Zeitnullpunkt ein Plasmaschlauch zwischen den Elektroden gleichmäßig mit Ladungsträgern ausgefüllt ist. Störende Einflüsse, wie unregelmäßige Ladungsverteilung, Ladungsausgleich an den Elektroden und Ausbildung einer Stoßwelle, werden vernachlässigt. Da nur die viel

schnelleren Elektronen am Strom teilnehmen, folgt mit

$$i = n_e V_{\text{Pl}} e v_- / l,$$

(V_{Pl} = Volumen des Plasmas, r = Radius des Plasmaschlauchs),

$$i = n_e \pi r^2 b_e E e,$$

(n_e = Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit, b_e = Beweglichkeit der Elektronen).

Mit der Definition der Leitfähigkeit $i = \sigma E$ folgt

$$\sigma = n_e \pi r^2 b_e e.$$

Die Leitfähigkeit wird also proportional zur Dichte der Elektronen angesetzt. Man nimmt weiterhin an, daß bis zum Ende der hier betrachteten schnellen Entladungen die Atome und Ionen praktisch in Ruhe geblieben sind und keine Energie aufgenommen haben. Vernachlässigt man in den kurzen Zeiten auch noch Strahlungsverluste und Wärmeableitung, so ist die innere Energie pro Längeneinheit gegeben durch

$$u = n_e \pi r^2 \left(\frac{3}{2} k T + e V_i + \frac{n_a}{n_i} \cdot e V_a \right),$$

n_a/n_i = Verhältnis von anregenden zu ionisierenden Stößen, V_i = Ionisierungsspannung, V_a = Anregungsspannung.

Daraus folgt eine Beziehung zwischen innerer Energie und Leitfähigkeit

$$\sigma = \alpha u, \quad \alpha = \frac{b_e \cdot e}{\frac{3}{2} k T + e V_i + (n_a/n_i) e V_a}.$$

Von der Größe α wird angenommen, daß sie eine Konstante ist. Nur dann kann man den Ansatz in einfacher Weise weiterbenutzen. α müßte aber über b_e , T und n_a/n_i schwach feldstärkeabhängig sein. Aus den Rechnungen, die im Anhang ausgeführt werden, erhält man als Ergebnis für $R_1 = R/l$

$$R_1(t) = (E_0/i_0) \exp \{ -\alpha E_0^2 t \}, \quad (12)$$

$$R_1(t) = (2 \alpha)^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^t i^2 dt \right)^{-1/2}. \quad (13)$$

Die erste Formel ist bereits im § 4 des ersten Teiles geprüft worden. Für konstantes E läßt sich der Widerstand halblogarithmisch tatsächlich als Gerade darstellen, aus der man die Funkenkonstante α bestimmt. Sie scheint jedoch schwach feldstärkeabhängig zu sein (α fällt mit fallendem E). Verschiedene

⁵ R. ROMPE u. W. WEIZEL, Z. Phys. **122**, 636 [1944].

⁶ W. WEIZEL, Z. Phys. **135**, 639 [1953].

Kapazitäten ergeben bei gleicher Schlagweite den gleichen α -Wert. Wir geben einen Mittelwert an:

$$\bar{\alpha} = 1,1 \text{ cm}^2/\text{V}^2 \cdot \text{sec}.$$

Mit diesem α -Wert sind in der Abb. 5 die Widerstandsverläufe nach Formel (13) bestimmt worden. Die Übereinstimmung von Experiment und Theorie ist recht gut und wäre noch besser, wenn man eine Feldstärkeabhängigkeit für α berücksichtigen würde. Die Übereinstimmung ermutigt zu der Annahme, daß die von WEIZEL und ROMPE gemachten Voraussetzungen im Nanosekundenbereich zutreffen. Man darf die Rechnung also mit einem etwa konstanten α forsetzen. Es sollen Strom, Spannung, Leistung und Widerstand berechnet werden, um mit dem Experiment vergleichen zu können. Es bleibt allerdings fraglich, ob dieser einfache Ansatz vollständige Übereinstimmung bringen kann.

§ 3. Berechnung einer geschlossenen Lösung für nichtschwingende Entladungen

Es ist nicht möglich, für beliebige Werte des Zuleitungswiderstandes R_Ω , der Kapazität C und der Induktivität L_0 eine geschlossene Lösung anzugeben. Für gewisse Werte von Parameterkombinationen gibt WEIZEL graphische Lösungen an⁶. Man kann jedoch für die hier vorliegenden nichtschwingenden Entladungen Zuleitungswiderstand R_Ω und Induktivität L_0 vernachlässigen, d. h. man setzt

$$L_0 (di/dt) \ll U_c \quad \text{und} \quad R_\Omega i \ll U_c.$$

Man erhält dann eine implizite Gleichung für den Strom:

$$i(t) = \left[2 \alpha \int_{-\infty}^t i^2 dt \right]^{1/2} \left(E_0 - \frac{1}{iC} \int_{-\infty}^t i dt \right).$$

Durch die Substitutionen

$$I(x) = \alpha_0 i(t), \quad \alpha_0 = \frac{1}{U_0 C 2 \alpha E_0^2}, \quad t = \frac{1}{2 \alpha E_0^2} x$$

kann sie in eine dimensionslose Funktionalgleichung übergeführt werden:

$$I_{n+1}(x) = \left[\int_{-\infty}^x I_n^2 dx \right]^{1/2} \left(1 - \int_{-\infty}^x I_n dx \right).$$

Das bedeutet z. B., daß sich alle harten Entladungen auf die gleiche Gestalt transformieren lassen und man keine speziellen numerischen Werte zu benutzen braucht. Man kann die vorstehende Gleichung als Iterationsvorschrift in einem Näherungsverfahren

auffassen. Man kann die vielen graphisch auszuführenden Schritte auch umgehen, wenn man die genäherte Lösung von vornherein durch die einfache Funktion

$$I_0 = \frac{1}{10,5} e^{-x^2/32} \quad \text{approximiert.}$$

Durch einmalige Iteration erhält man die endgültige Lösung in geschlossener Form:

$$I_1 = \frac{1}{10,5} \left[\int_{-\infty}^x e^{-x^2/16} dx \right]^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{10,5} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/32} dx \right). \quad (14)$$

Die Größen⁷

$$\frac{i(t)}{i_{\max}}, \quad \frac{U(t)}{U_0}, \quad R_1' = R_1 \cdot \frac{i_{\max}}{E_0}, \quad \varrho_0' = R_1' (x - x_0)$$

sind als Funktion der normierten Zeit in Abb. 12 aufgetragen worden. Der Nullpunkt liegt bei

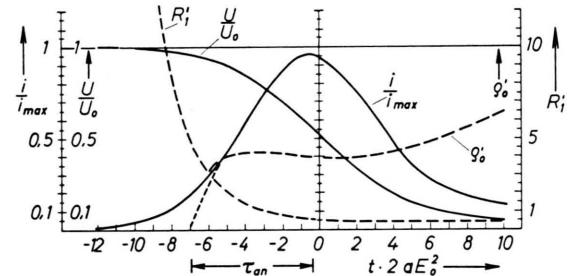


Abb. 12. Mit dem Ansatz von ROMPE und WEIZEL berechnete Funktionen.

$x_0 = -7$. Man entnimmt der Abbildung geschlossene Ausdrücke für die wichtigen Funktengrößen:

$$\text{Anstiegszeit:} \quad \tau_{\text{an}} = 6,5 / (2 \alpha E_0^2),$$

$$\text{Maximalstrom:} \quad i_{\max} = 0,096 U_0 C \cdot 2 \alpha E_0^2,$$

$$\text{Widerstandskonstante:} \quad \varrho_0 = 11 / (l C (\alpha E_0^2)^2),$$

Maximale Stromänderung:

$$(di/dt)|_{\max} = 0,075 \cdot U_0 C (\alpha E_0^2)^2.$$

Für einige nichtschwingende Entladungen soll die gute Übereinstimmung in der nächsten Tabelle (Tab. 3) gezeigt werden.

§ 4. Diskussion der Lösung

Auffällig ist die starke Abhängigkeit der angegebenen Größen von der Anfangsfeldstärke E_0 . Die Anstiegszeit ist erstaunlicherweise unabhängig von der Kapazität oder der Ladeenergie, was durch die

⁷ Wegen $U_L(t) \ll U_c(t)$ ist $U_c(t) \approx U_R(t) = U(t)$.

C [pF]	l [mm]	i_{\max} [A]		ϱ_0 in $10^{-7} \Omega \text{sec/cm}$		τ_{an} in 10^{-10} sec	
		berechn.	gemess.	berechn.	gemess.	berechn.	gemess.
30	0,7	77	100	4,5	4,3	9,5	9
60	0,7	162	200	2,15	—	9,5	12
30	1,5	61	67	7,0	7,5	18,4	18
60	1,5	122	125	3,5	4,0	18,4	18
150	1,5	274	256	1,6	1,9	20	22,5
30	2,4	44,5	29,5	13,8	28	28	40
60	2,4	89	92,5	6,9	8,3	28	32
150	2,4	210	176	2,8	—	28	35
350	2,4	520	400	2,0	—	28	37,5

Tab. 3. Vergleich gemessener und nach der Theorie von WEIZEL und ROMPE berechneter Größen.

Experimente bestätigt wird. Bei der Beurteilung der Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie ist zu berücksichtigen, daß kleine Fehler in der Bestimmung von U_0 und l sich stärker in E_0 und erst recht in Potenzen von E_0 auswirken.

Der Schwingungsgradparameter Härte läßt sich jetzt geschlossen darstellen.

$$\psi = 1/[0,075(\alpha E_0^2)^2 L_0 C].$$

Entscheidend sind die beiden Zeitkonstanten $1/\alpha E_0^2$ und $\sqrt{L_0 C}$. Man kann aus ψ auch den Schwingungsgradparameter K gewinnen, der als Parameter bei WEIZEL⁶ auftritt:

$$K = \frac{1}{2} \alpha E_0^2 \sqrt{L_0 C}.$$

Für den speziellen Wert $\psi = 6,8$ erfaßt man gerade alle aperiodischen Entladungen. Das entspricht einem

$$K_{\text{aper.}} = \frac{1}{2} \alpha E_0^2 \sqrt{L_0 C} |_{\text{aper.}} = 0,75.$$

Dieses Ergebnis ist sehr wichtig. Es ermöglicht die Berechnung von schnellen Schalfunkenstrecken und die Erzeugung von kurzen Lichtimpulsen, die nur einen kurzen Leuchtschwanz aufweisen. Die die Entladung begleitenden Lichtimpulse haben Halbwertsbreiten zwischen 2,5 und 8 ns (für 30 und 60 pF), die mit zunehmender Funkenlänge zunehmen. Die Halbwertsbreite ist um einige Nanosekunden breiter als die der Einhüllenden des elektrischen Impulses.

Die Größe K erklärt auch, warum die aperiodische Entladung bei größerer Kapazität eine größere Schlagweite erfordert: Das wachsende C muß durch ein entsprechend kleineres E_0 ausgeglichen werden. Man versteht jetzt, daß die Entladungen von ANDREEV und VANYUKOV viel stärker schwingen als die hier untersuchten: Die größere Zuleitungsinduktivität von 10 nH und die etwa zehnmal größeren Entladekapazitäten ergeben einen Wert für K , der 0,75

übersteigt. Je induktionsärmer der Aufbau ist, desto härter ist die Entladung. Unter sonst gleichen Bedingungen ist die Entladung im Nanosekundenbereich generell härter als eine solche im Bereich von 10 bis 100 ns. Durch diese Untersuchungen ist gezeigt, daß sich der Funkenablauf im Bereich von 1 bis 100 ns übersichtlich beschreiben läßt.

III. Mathematischer Anhang

1. Zur Berechnung des Stromverlaufs

Die Differentialgleichung für den Schwingkreis

$$Q/C + R(t) \cdot \dot{Q} + L_0 \ddot{Q} = 0$$

nimmt nach Einführung des Widerstandes $R(t) = \varrho/t$ die Form

$$\frac{1}{C} i + \left(-\frac{\varrho}{t^2} \right) i + \frac{\varrho}{t} \frac{di}{dt} + L_0 \frac{d^2i}{dt^2} = 0, \quad \varrho = \varrho_0 \cdot l,$$

an. Nach weiterer Umformung

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{\varrho}{L_0} \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{L_0 C} - \frac{\varrho}{L_0} \frac{1}{t^2} \right) i = 0,$$

läßt sie sich mit der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{t} y' + \left(\beta^2 - \frac{p^2 - \alpha^2}{t^2} \right) y = 0$$

vergleichen. Diese hat als Lösung eine Zylinderfunktion

$$i(t) = t^2 \cdot Z_p(\beta t),$$

$$Z_p(\beta t) = C_1 I_p(\beta t) + C_2 N_p(\beta t),$$

$I_p(\beta t)$ = BESSEL-Funktion, $N_p(\beta t)$ = NEUMANNSCHE Funktion.

Die auftretenden Konstanten haben folgende Bedeutung:

$$\beta = (L_0 C)^{-1/2}, \quad p = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} (\alpha - 1) = 1 - \alpha,$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} (\varrho/L_0 - 1), \quad \alpha < 0.$$

Zu erfüllen sind die beiden Randbedingungen

$$i(0) = 0, \quad \frac{di}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{U_0 - L_0 (di/dt)}{R} \right\} \Big|_{t=0} \\ = \frac{U_0}{R} \frac{\psi - 1}{\psi} \neq 0.$$

Die erste Randbedingung: Für kleine βt verhält sich:

$$N_p(\beta t) \text{ wie } -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\beta t} \right)^n, \text{ Grenzwert } -\infty, \\ \text{ folgt } C_2 = 0;$$

$$I_p(\beta t) \text{ wie } \frac{\beta^p \cdot t^p}{p! 2^p}, \text{ Grenzwert } 0.$$

Die zweite Randbedingung:

$$\frac{dt}{di} = C_1 \left\{ \alpha t^{z-1} I_p(\beta t) + \beta t^z \left[-\frac{p}{\beta t} I_p(\beta t) + I_{p-1}(\beta t) \right] \right\}, \\ \frac{di}{dt} \Big|_0 = C_1 \left\{ \frac{\beta^p}{p! 2^p} (\alpha t^{z-1} - p t^{z-1}) t^p + \beta t^z \frac{\beta^{p-1} \cdot t^{p-1}}{(p-1)! 2^{p-1}} \right\} \Big|_{t=0} \\ = C_1 \frac{\beta^p}{p! 2^p} = \frac{U_0}{R} \frac{\psi - 1}{\psi}; \quad C_1 = \left(1 - \frac{1}{\psi} \right) \frac{p! 2^p}{\beta^p} \frac{U_0}{R}.$$

Damit lautet die Lösung endgültig:

$$i = \left(1 - \frac{1}{\psi} \right) \frac{p! 2^p}{\beta^p} \frac{I_p(\beta t)}{t^{p-1}} \frac{E_0}{\varrho_0}.$$

2. Zum Ansatz von ROMPE und WEIZEL 5, 6

Ausgehend von der Beziehung

$$\sigma = \alpha \cdot u, \quad \alpha = \frac{b_e \cdot e}{\frac{3}{2} k T + e V_i + e (n_a/n_i) V_a}$$

findet man für die Spannung am Funkenwiderstand

$$U_R = i R \cdot l = i \frac{l}{\sigma} = \frac{i \cdot l}{\alpha \cdot u}.$$

Für einen Kreis mit Selbstinduktion L_0 und Funkenwiderstand R ist die Gleichung

$$\frac{i \cdot l}{\alpha \cdot u} + R_\Omega \cdot i + L_0 \frac{di}{dt} = U_c$$

zu lösen. Das hat WEIZEL numerisch durchgeführt. Die für Schalt- und Beleuchtungszwecke interessanten nichtschwingenden, harten Entladungen sind durch die Eigenschaften $L_0 (di/dt) \ll U_c$ und $R_\Omega i \ll U_c$ gekennzeichnet.

$$U_R = U_c = U_0 - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt,$$

$$E(t) = E_0 - \frac{1}{l C} \int_{-\infty}^t i \, dt.$$

Der Ansatz und der Energiesatz liefern folgende Beziehung für den Strom:

$$i E = \frac{i^2}{\sigma} = \frac{du}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\sigma}{dt},$$

$$i^2 = \frac{1}{2 \alpha} \frac{d\sigma^2}{dt},$$

$$i^2 = 2 \alpha E^2 \int_{-\infty}^t i^2 \, dt. \quad (15)$$

In der letzten Gleichung kann man das zeitabhängige $E(t)$ durch obige Beziehung ersetzen:

$$i(t) = \left[2 \alpha \int_{-\infty}^t i^2 \, dt \right]^{1/2} \left(E_0 - \frac{1}{l C} \int_{-\infty}^t i \, dt \right).$$

Diese Gleichung für $i(t)$ kann man als Iterationsvorschrift betrachten. Die linke Seite stellt eine bessere Näherung dar als die rechts eingesetzte Funktion. Nimmt man in Gl. (15) E als konstant an, gibt es eine weitere einfache Beziehung für den Widerstand:

$$i(t) = i_0 \exp \{ \alpha E_0^2 t \}, \\ R_1(t) = (E_0/i_0) \exp \{ -\alpha E_0^2 t \}, \\ \text{sonst} \quad R_1(t) = (2 \alpha)^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^t i^2 \, dt \right)^{-1/2}.$$

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. H. RAETHER und Herrn Privatdozent Dr. L. FROMMHOLD für die Förderung der Arbeit.